DEVOIR DE RENTRÉE
CORRECTION

ECG2 MATHS APPLIQUÉES

Barème et exigences.

Exercice 1 : 5 points.

1. 2 points, il suffit de citer le cours.
2. 2 points, on vérifie simplement que la fonction proposée fonctionne.
3. 1 point, c'est la conclusion. Il faut citer le principe de superposition.

Exercice 2 : 21 points.

1. a. 4 points, 2 pour l'interprétation du programme, 2 pour le calcul matriciel.
b. 2 points, 1 pour l'inversibilité, 1 pour l'inverse.
2. a. 4 points, 2 pour le noyau, 2 pour l'image (1 pour la seule dimension).
b. 3 points, méthode au choix.
c. 2 points.
3. a. 3 points, 2 pour le calcul, 1 pour présenter les solutions sous forme de $\mathrm{Vect}(\cdots)$.
b. 3 points, question difficile, 1 point donné si la méthode semble être la bonne.

Exercice 3 : 46 points barème (presque) officiel.

1. a. 4 points, 1 pour la justification de la dérivabilité, 1 pour le calcul de la dérivée, 1 pour l'étude de signe, 1 pour les limites. 0 si incompatibilité variations/limites.
b. 2 points, 1 seulement si on vérifie seulement que $u_n > 0$, 0 si la propriété à montrer est mal énoncée.
2. a. 4 points, pas de justification demandée, 3 seulement si $<$ au lieu de $<=$.
b. 4 points, 2 pour comprendre ce que donne le programme, 2 pour la conjecture sur les différents comportements des suites extraites.
c. 4 points, aucun commentaire demandé, 3 si erreur dans le `range`, 1 point facile.
3. a. 3 points, 0 s'il manque une des hypothèses pour appliquer le théorème de la bijection.
b. 3 points, 1 seulement si le raisonnement par équivalence n'est pas explicite, -1 point pour l'oubli de $0 \in]-\infty, 1]$.
c. 3 points, 1 pour $\alpha < 1$, 2 pour l'autre inégalité.
4. a. 1 point.
b. 3 points (soit une récurrence correcte, soit pour dire que $u_0 < u_2$ et f^2 croissante).
c. 3 points.
5. a. 2 points, 1 pour l'expression correcte (ne pas confondre $f \circ f$ et $x \mapsto f(x)^2$), 1 pour la simplification.
b. 2 points, 1 pour la continuité sur $]0, +\infty[$, 1 pour la continuité en 0.
c. 3 points, 1 seulement si on ne montre pas le "exactement".
d. 2 points, 1 seulement si on ne mentionne pas la continuité de f.
6. 3 points, 2 pour montrer qu'elle n'est pas majorée, 1 pour en déduire qu'elle diverge vers $+\infty$.

Date: 3 Septembre 2024 14h00-18h00.
http://louismerlin.fr.

Exercice 4 : 29 points.

1. **a.** 2 points, 1 pour reconnaître la bonne loi dans le contexte, 1 pour les paramètres.
   b. 2 points, 1 pour chaque. Il suffit de connaître la définition de la binomiale.
   c. 1 point, une explication vague suffit.
   d. 1 point, la seule réponse suffit.
   e. 3 points, 1 pour la formule du crible, 2 pour le calcul.
2. 2 points, 1 pour l'intersection, 1 pour la suite décroissante d'événements.
3. **a.** 6 points, 2 pour chaque ligne à compléter.
   b. 5 points, toute tentative rapporte facilement 2 points.
4. 1 point, la réponse seule suffit.
5. 2 points, 1 pour la seule mention de l'incompatibilité d'événements.
6. 4 points, 2 pour la loi, 2 pour l'espérance (question difficile).

Total : 96 points. Le total obtenu est divisé par 3,6 (et arrondi au 1/2 point supérieur pour faire une note sur 20 (il y a 27 points à prendre).

Commentaires généraux/erreurs fréquentes.

Rédaction / Stratégie.

- Les raisonnements par équivalence sont risqués, souvent faux et maladroits du point de vue de l'expression logique.
- Il est préférable de dire explicitement qu'on admet un résultat d'une question pour poursuivre. Ignorer la question ou (pire) faire semblant de l'aborder en répétant quelques hypothèses n'est jamais une bonne stratégie. Un correcteur déteste avoir l'impression qu'on essaye de l'arnaquer.
- Dans les barèmes de notation, une preuve juste + une preuve fausse = 0 point. Lorsque deux idées se présentent pour aborder une question, il faut en choisir une.
- Il faut apprendre et citer le nom des théorèmes.
- Il est pénalisé de mettre des hypothèses inutiles lorsqu'on cherche à appliquer un théorème.
- Il existe "des suites qui tendent vers ..." ou "des limites qui sont égales à ..." mais pas "des limites qui tendent vers ...".
- On ne peut démontrer des propriétés par récurrence que lorsqu'elle dépendent de n. Montrer par récurrence que "la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie" n'en fait pas partie (la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un objet qui ne dépend pas de n).
- Il faut absolument prendre l'habitude de soigner son expression. Les confusions entre les différents objets sont lourdement pénalisées (voir quelques exemples dans les commentaires des exercices 2 et 4).
- Lorsqu'une question commence par "en déduire que", il est absolument indispensable d'utiliser la question précédente. Toute autre démarche est vouée à l'échec.
- "admettre" un résultat signifie que on se donne le droit de l'utiliser sans l'avoir démontré, ce n'est donc jamais la conséquence d'une preuve.
- Il faut arrêter de répondre n'importe quoi à toute une série de question en essayant de deviner maladroitement ce qui semble le plus plausible. Rédiger correctement est difficile, c'est un des objectifs de cette année. Mais l'affirmation péremptoire de réponses sans commentaire ne peut pas être considéré comme satisfaisant et fait très mauvais effet auprès du correcteur.

Exercice 1. Cet exercice est tiré du cahier de vacances. Les étudiants n'ayant pas eu le courage de dépasser l'exercice 12 en deux mois d'été doivent se mettre au travail *d'urgence.*

- La question 1 est une pure question de cours, il est bien dommage d'écrire -2 au lieu de 2 (comme dans une grosse moitié des copies). Les solutions d'une équation différentielle sont des fonctions. Ainsi
$$S = \left\{t \mapsto \lambda e^{2t} \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$
est la réponse attendue tandis que $S = \left\{\lambda e^{2t}\right\}$ est absurde et ne rapporte aucun point.
- Il existe une différence de stratégie fondamentale entre trouver une solution particulière et vérifier qu'une fonction donnée est une solution particulière. Dans le deuxième cas, c'est beaucoup plus facile et il suffit simplement de dériver la fonction donnée et de montrer qu'elle satisfait la relation.
- Lorsqu'on utilise le principe de superposition pour la conclusion, il faut le citer absolument.

Exercice 2.

- On n'applique pas la formule du binôme pour les matrices sans avoir vérifié (puis écrit) que les matrices commutent. Même si c'est un cas particulier simple de la formule du binôme, l'égalité
$$(A - I)^2 = A - 2A + I$$
doit se justifier par le fait que A et I commutent.
- J'ai vu plusieurs fois $(N + I)^n = N^n + I^n$...
- Montrer que A et inversible **et** écrire A^{-1} comme combinaison linéaire de A et I suggère un raisonnement théorique. On peut bien sûr faire un pivot pour montrer que A est inversible et trouver une matrice inverse mais ça ne donnera pas la forme de A^{-1} voulue.
- De gros problèmes de langage tout au long de l'exercice. Il est préférable de passer un moment à s'assurer qu'on n'est pas en train de confondre des matrices, des vecteurs, des sous-espaces vectoriels, des familles de vecteurs. Un exemple très fréquent consiste à présenter l'image d'une matrice comme l'ensemble des vecteurs colonnes. Évidemment c'est absurde, l'image d'une matrice est un sous-espace vectoriel. Dans le même ordre d'idées, les solutions d'un système linéaire est un ensemble de vecteurs. Une réponse du genre
$$S = \{x = y + z \mid y, z \in \mathbb{R}\}$$
à la question **3.b** par exemple est absurde.
- La commande Python qui sert à calculer le carré d'une matrice (ou une autre puissance) ne semble pas bien connue.
- À la question **3.b**, beaucoup ont répondu à la réciproque de la question mais pas à la question elle-même. Les problèmes de logique coûtent extrêmement cher en ECG.

Exercice 3.

- On ne peut pas se permettre de se rater dans une calcul de dérivée aussi simple (question **1.a**). Les étudiants qui se sont trompés doivent passer du temps à refaire des calculs de dérivée.
- Il faut expliquer pourquoi une fonction est dérivable avant de la dériver. Si c'est la première fois de votre composition, il ne faut pas avoir peur de mettre beaucoup de détails. Je rappelle que le quotient de fonctions dérivables n'est pas dérivable a priori, il faut pour ça que le dénominateur ne s'annule pas, et vous devez justifier la dérivabilité de la fonction en montrant qu'effectivement le dénominateur ne s'annule pas.
- La question **1.b** a été très mal comprise. Le problème de décider si une suite récurrente est bien définie consiste à montrer que u_n est toujours dans l'ensemble de définition de f (pour pouvoir appliquer f à u_n et fabriquer u_{n+1}). C'est ce type d'explications qu'on s'attend à trouver dans une copie.
- Les questions d'informatique sont souvent ignorées. C'est une très mauvaise stratégie. L'écriture d'un programme complet pose énormément de problèmes.

- Lorsqu'on cherche une solution à l'équation $f(x) = x$, on n'applique pas le théorème de la bijection à f.
- Mentionner les croissances comparées alors que c'est inutile dans un calcul de limite fait perdre des points.
- Il faut annoncer clairement les propriétés qu'on veut démontrer par récurrence. Ne pas écrire $\mathcal{P}_n$ est pénalisé.
- Lorsqu'une fonction (comme h dans la question **5**) est définie par une formule pour $x > 0$ et par une valeur donnée $h(0)$ en 0, le seul moyen de prouver la continuité en 0 consiste à montrer que $\lim_{x\to 0} h(x) = h(0)$.
- Personne n'a compris l'intérêt des deux programmes informatiques dans l'étude de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Cela conduit à affirmer des choses fantaisistes sur le comportement asymptotique de la suite.

Exercice 4.

1. Pour citer une loi de proba, il faut donner les paramètres et il y en a 2 dans le cas de la loi binomiale.
2. Pour justifier qu'une variable suit la loi binomiale, il faut impérativement dire qu'elle compte le nombre de succès dans une répétition d'épreuve de Bernoulli indépendantes et de même probabilité de succès. S'il manque l'un de ces mots-clés, la justification n'est pas complète.
3. Une variable aléatoire est un nombre. Ainsi dire que "X_n est une succession d'épreuves de Bernoulli" est absurde.
4. Une probabilité est un nombre, un événement est un ensemble. Toute phrase qui mélange les deux est forcément fausse et fait très mauvais effet. Il n'y a pas d'intersection de probabilités, ni de somme d'événements. Il faut prendre le réflexe de s'assurer que ce n'est pas ce qu'on écrit.
5. La réponse à la question **1.b** doit s'inspirer de celle de la question **1.a**. C'est souvent le cas. En particulier une paraphrase pour expliquer quel est l'événement dont on cherche la proba n'est évidemment pas ce qu'on attendait.
6. La question **6** et la première ligne du programme à trous étaient les deux seules questions difficiles dans tout le sujet.

Correction détaillée.

Exercice 1

1. Déterminer toutes les fonctions φ définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ et solutions de l'équation différentielle
$$\varphi'(t) = 2\varphi(t).$$
2. Montrer que la fonction $t \mapsto te^{2t}$ est solution particulière de l'équation différentielle
$$\varphi'(t) = 2\varphi(t) + e^{2t}.$$
3. Déterminer toutes les fonctions φ définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ et solutions de l'équation différentielle
$$\varphi'(t) = 2\varphi(t) + e^{2t}.$$

Correction 1

1. On sait que les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions
$$\varphi(t) = Ce^{2t},$$
où C est un nombre réel quelconque.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = te^{2t}$. On a bien

$$f'(t) = e^{2t} + 2te^{2t} = e^{2t} + 2f(t).$$

La fonction f est donc bien solution de l'équation avec second membre.

3. On sait que les solutions de l'équation avec second membre sont les fonctions construites par la somme d'une solution de l'équation homogène et d'une solution particulière de l'équation avec second membre. Ainsi les solutions sont de la forme

$$\varphi(t) = Ce^{2t} + te^{2t},$$

où C est un réel quelconque.

Exercice 2

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. a. On considère le programme Python suivant

```python
import numpy as np
import numpy.linalg as alg

A = np.array([[0,1,1],[-2,3,2],[1,-1,0]])
B = A -np.eye(3)

print(alg.matrix_power(B,2))
```

L'exécution de ce programme retourne

```
[[0  0  0]
 [0  0  0]
 [0  0  0]]
```

.

Quelle égalité entre matrices est suggérée par ce programme ? Vérifier cette égalité par le calcul.

b. En déduire que A est inversible et écrire A^{-1} comme combinaison linéaire de A et I.

2. On pose $N = A - I$.

a. Trouver une base de l'image et du noyau de la matrice N.

b. Exprimer, pour tout entier naturel n, la matrice A^n comme combinaison linéaire de I et N.

c. Vérifier que l'expression précédente est aussi valable pour $n = -1$.

Correction 2

1. a. Le programme suggère que $(A - I)^2 = 0$ (0 désigne ici la matrice nulle). Vérifions-le. On a déjà

$$A - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

et un calcul montre immédiatement que $(A - I)^2$ est la matrice nulle.

b. On applique la formule du binôme de Newton à l'expression $(A-I)^2$. Cela est possible car A et I commutent (la matrice identité commute avec toute matrice). On obtient donc

$$(A-I)^2 = A^2 - 2A + I = 0$$

(on rappelle que $I^2 = I$). Cette dernière expression est équivalente à

$$A^2 - 2A = -I$$

ou encore

$$A(2I - A) = I.$$

On voit donc que A est inversible et $A^{-1} = 2I - A$.

2. a. Pour trouver le noyau, posons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et résolvons l'équation $(A-I)X = 0$. On a

$$(A-I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -x + y + z & = & 0 \\ -2x + 2y + 2z & = & 0 \\ x - y - z & = & 0 \end{array} \right.$$

les trois lignes sont proportionnelles et on obtient alors comme solution les vecteurs $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $x = y + z$. Ainsi

$$X = \begin{pmatrix} y+z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les deux vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas proportionnels et engendrent le noyau. On en déduit que ces deux vecteurs forment une base de $\mathrm{Ker}(A)$.
Le noyau est donc de dimension 2. Le théorème du rang nous permet alors de calculer la dimension de l'image :

$$\mathrm{rg}(N) = 3 - \dim \mathrm{Ker}(N) = 1.$$

Une base de l'image de N est alors constituée par un unique vecteur non nul de $\mathrm{Im}(N)$, par exemple $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

b. À la question précédente, nous avions établi que $N^2 = (A-I)^2 = 0$. On se sert de cette remarque pour calculer les puissances de A. Les quelques premiers cas nous permettront de conjecturer une formule générale que nous montrerons par récurrence. En effet

$$A^1 = A = N + I.$$
$$A^2 = (N+I)^2 = N^2 + 2N + I = 2N + I.$$
$$A^3 = (2N+I)(N+I) = 2N^2 + 2NI + IN + I = 3N + I.$$
$$A^4 = (2N+I)^2 = 4N^2 + 4N + I = 4N + I.$$

Dans les calculs précédents, pour appliquer la formule de binôme, nous avons utilisé que N et I commutent.
Il semblerait donc que $A^n = nN + I$. Montrons cette relation par récurrence. L'initialisation est faite puisque nous avons déjà vérifié la propriété pour $n = 1, 2, 3, 4$.
Pour l'hérédité, supposons que, pour un entier k arbitraire, nous ayons $A^k = kN + I$. Alors

$$A^{k+1} = A \cdot A^k = (N+I)(kN+I) = kN^2 + NI + I(kN) + I = (k+1)N + I,$$

ce qui démontre la propriété au rang $k+1$ et, donc pour tout n par le principe de récurrence.

Remarque. On peut aussi calculer A^n directement avec la formule du binôme, en développant l'expression

$$A^n = (N+I)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k I^{n-k} = I + nN.$$

En effet, les termes après $k=2$ sont nuls puisque les puissances de N supérieures à 2 sont nulles.

c. On sait que

$$A^{-1} = 2I - A = 2I - (N+I) = -N + I,$$

ce qui est exactement la même expression pour $k=-1$.

3. a. Le système est équivalent à résoudre $(A-I)X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (on cherche donc le noyau de la matrice $A - \mathrm{I}_3$. On a déjà calculé le noyau de $A - I = N$ à la question **2.a**.

b. Dans le même esprit que la question précédente, on cherche maintenant à montrer que le noyau de $A - \lambda I$ est l'espace nul $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$, autrement dit que la matrice $A - \lambda I$ est inversible. Or

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ -2 & 3-\lambda & 2 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{pmatrix}.$$

Pour décider si cette matrice est inversible, on la réduit avec les opérations de pivot.

- On utilise le 1 en bas à gauche comme pivot : $A - \lambda I \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\lambda \\ -2 & 3-\lambda & 2 \\ -\lambda & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- On fait $L_2 = L_2 + 2L_1$ et $L_3 = L_3 + \lambda L_1$: $A - \lambda I \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 2-2\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 \end{pmatrix}$.
- On fait $L_3 = L_3 - L_2$: $A - \lambda I \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 2-2\lambda \\ 0 & 0 & -1+2\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix}$.

Les trois coefficients diagonaux de cette matrice ne sont pas nuls : c'est évident pour le premier et pour le deuxième puisque $\lambda \neq 1$. Pour le troisième, on remarque que $-1+2\lambda-\lambda^2 = -(\lambda-1)^2$ qui ne s'annule donc pas puisque $\lambda \neq 1$.

Exercice 3

Pour tout $x \in]0, +\infty[$, on pose $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x}$.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tour entier naturel n.

1. **a.** Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto f(x)$ (on dressera son tableau de variations, en précisant les limites).

   b. Vérifier que chaque terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est correctement défini et strictement positif.

2. **Informatique.**

   a. Recopier et compléter la fonction Python suivante afin que l'appel fonc_1(a) renvoie le plus petit entier n tel que $u_n > a$.

```
def fonc_1(a) :
  from numpy import exp
  u = 1
  n = 0
  while ...... :
    u = exp(-u)/u
    n = ......
  return n
```

   b. On considère maintenant la fonction Python

```
def fonc_2(a) :
  from numpy import exp
  u = 1
  n = 0
  while u > a :
    u = exp(-u)/u
    n = n+1
  return n
```

   Les appels fonc_1(10**6) et fonc_2(10**(-6)) donnent respectivement 6 et 5.
   Qu'en déduire pour u_5 et u_6 ?
   Commenter ce résultat en une ligne.

   c. Écrire une fonction Python qui a pour argument un entier n et qui renvoie la valeur de u_n.

3. Pour $x \in [0, +\infty[$, on pose $g(x) = e^{-x} - x^2$.

   a. Démontrer que la fonction $g : x \mapsto g(x)$ réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $]-\infty, 1]$.

   b. En déduire que l'équation $f(x) = x$ d'inconnue x possède une unique solution dans l'intervalle $]0, +\infty[$ que l'on notera α.

   c. Justifier que $\frac{1}{e} < \alpha < 1$. *On rappelle que $e \approx 2,7$.*

4. **a.** Démontrer que l'on a : $u_2 > u_0$.

   b. En déduire que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

   c. Justifier que la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

5. Pour $x \in]0, +\infty[$, on pose $h(x) = f \circ f(x)$. On pose également $h(0) = 0$.

   a. Soit x un réel strictement positif. Déterminer $h(x)$.

   b. Démontrer que la fonction $h : x \mapsto h(x)$ est continue sur $[0, +\infty[$.

   c. Démontrer que l'équation $h(x) = x$ d'inconnue x admet exactement deux solutions sur $[0, +\infty[$ qui sont 0 et α, α étant le réel introduit à la question **3.b**.

   d. En déduire la limite de la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$

6. La suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle majorée ? Admet-elle une limite ?

Correction 3

Une très belle correction (écrite par Tom Dutilleul) se trouve à la page `https://louismerlin.fr/Enseignement/Archives/EML23cor.pdf`. Attention le sujet original comporte une erreur d'énoncé dans la 2ème fonction Python, la correction proposée tient compte de la modification nécessaire du sujet.

Exercice 4

On dispose de trois urnes U_1, U_2 et U_3 et d'une infinité de jetons numérotés 1,2,3,...

On répartit un par un les jetons dans les urnes : pour chaque jeton, on choisit au hasard et avec équiprobabilité une des trois urnes dans laquelle on place le jeton. Le placement de chaque jeton est indépendant de tous les autres jetons, et la capacité des urnes en jetons n'est pas limitée.

Pour tout entier naturel n, non nul, on note X_n (respectivement Y_n, Z_n) le nombre de jetons présents dans l'urne 1 (respectivement l'urne 2, l'urne 3) après avoir réparti les n premiers jetons.

Pour tout entier naturel non nul, on note V_n l'événement : "Après la répartition des n premiers jetons, au moins une urne reste vide".

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- **a.** Justifier que X_n, Y_n et Z_n suivent la même loi binomiale dont on précisera les paramètres.
- **b.** Expliciter $P(X_n = 0)$ et $P(X_n = n)$.
- **c.** Justifier que $(Y_n = 0) \cap (Z_n = 0) = (X_n = n)$.
- **d.** Exprimer l'événement V_n à l'aide des événements $(X_n = 0)$, $(Y_n = 0)$ et $(Z_n = 0)$.
- **e.** En déduire que

$$P(V_n) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^n - 3\left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

2. On note V l'événement "Au moins l'une des trois urnes reste toujours vide".

Exprimer l'événement V à l'aide des événements V_n, puis démontrer que $P(V) = 0$.

3. Soit T la variable aléatoire égale au nombre de jetons nécessaires pour que, pour la première fois, chaque urne contienne au moins un jeton.

- **a.** Compléter le programme Python suivant pour qu'il simule le placement des jetons jusqu'au moment où chaque urne contient au moins un jeton, et pour qu'il renvoie la valeur prise par la variable aléatoire T.

```python
import numpy.random as rd

def T():
  X=0
  Y=0
  Z=0
  n=0
  L=[X,Y,Z]
  while ......... :
    i = rd.randint(0,3)    #  choix d'un nombre entier entre 0 et 2
    L[i] = ......
    n = n+1
  return .......
```

- **b.** Écrire un programme Python qui simule 10 000 fois la variable aléatoire T et qui renvoie une valeur approchée de son espérance (en supposant pour le moment que son espérance existe).

4. Déterminer $T(\Omega)$.

5. Démontrer que pour tout $n \in T(\Omega)$,

$$P(T = n) = P(V_{n-1}) - P(V_n).$$

6. Démontrer que la variable aléatoire admet une espérance et calculer cette espérance.

Correction 4 **1. a.** En interprétant comme succès "le jeton est placé dans l'urne 1 (dont la probabilité est égale à 1/3) (resp. l'urne 2, l'urne 3)", la variable X_n (resp. Y_n, Z_n) correspond à une répétition de n épreuves indépendantes de Bernoulli. On peut donc conclure que X_n, Y_n et Z_n suivent toutes trois une loi binomiale $\mathcal{B}(n, 1/3)$.

b. On connait précisément la loi d'une variable aléatoire qui suit la loi binomiale. On a

$$P(X_n = 0) = \left(\frac{2}{3}\right)^n, \qquad \text{et} \qquad P(X_n = n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

c. L'événement $(Y_n = 0) \cap (Z_n = 0)$ décrit la situation où après avoir placé les n premiers jetons, les urnes 2 et 3 n'en contiennent aucun. On a donc placé tous les n jetons dans l'urne 1, c'est-à-dire que $(X_n = n)$.

d. On a $V_n = (X_n = 0) \cup (Y_n = 0) \cup (Z_n = 0)$.

e. Par la formule du crible, on a

$$\begin{aligned} P(V_n) \;=\; & P(X_n = 0) + P(Y_n = 0) + P(Z_n = 0) \\ & -P((X_n = 0) \cap (Y_n = 0)) - P((X_n = 0) \cap (Z_n = 0)) - P((Y_n = 0) \cap (Z_n = 0)) \\ & +P((X_n = 0) \cap (Y_n = 0) \cap (Z_n = 0)) \end{aligned}$$

Les trois urnes ne peuvent pas être vides simultanément donc l'événement $(X_n = 0) \cap (Y_n = 0) \cap (Z_n = 0)$ est l'événement impossible et

$$P((X_n = 0) \cap (Y_n = 0) \cap (Z_n = 0)) = 0.$$

Par ailleurs, d'après le raisonnement de la question **c.**, on peut calculer les probabilités des intersections doubles. En effet,

$$P((Y_n = 0) \cap (Z_n = 0)) = P(X_n = n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

et de même

$$P((X_n = 0) \cap (Y_n = 0)) = P((X_n = 0) \cap (Z_n = 0)) = \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

On obtient bien

$$P(V_n) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^n - 3\left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

2. On peut écrire l'événement V comme l'intersection

$$V = \bigcap_{n=1}^{+\infty} V_n.$$

En effet si une urne reste toujours vide, V_n est réalisé pour tout n. Or la suite d'événements V_n est décroissante au sens de l'inclusion

$$V_{n+1} \subset V_n$$

car si une urne est vide au moment $n+1$, elle était déjà vide au moment n. Par le théorème de la limite monotone, on obtient donc

$$P(V) = P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} V_n\right) = \lim_{n \to +\infty} P(V_n) = 0.$$

car les deux suites géométriques $\left(\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)_n$ et $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)_n$ convergent vers 0.

3. a.

```python
import numpy.random as rd

def T():
  X=0
  Y=0
  Z=0
  n=0
  L=[X,Y,Z]
  while L[0] == 0 | L[1] == 0 | L[2] == 0 :
    i = rd.randint(0,3)    # choix d'un nombre entier entre 0 et 2
    L[i] = L[i] + 1
    n = n+1
  return n
```

On rappelle qu'en Python, l'opérateur | est un "ou" logique et la condition

```python
L[0] == 0 | L[1] == 0 | L[2] == 0
```

teste si l'une (au moins) des conditions L[0] == 0, L[1] == 0 ou L[2] == 0 est réalisée. Une autre façon de décrire cette même condition aurait été d'écrire

```python
while L[0]*L[1]*L[2] == 0
```

car le produit est nul quand l'un au moins des 3 nombres est nul.

b. On peut obtenir une valeur approchée de l'espérance d'une variable aléatoire à l'aide de la moyenne empirique d'un échantillon de réalisations de la variable. Ici le sujet propose de fabriquer un échantillon de 10 000 apparitions de la variable T. On peut donc procéder de la manière suivante.

```python
ech = []
for i in range (10000):
  simul=T()
  ech.append(simul)
moyenne = sum(ech) / 10000
print(moyenne)
```

Il y a plusieurs autres options pour créer la liste de simulations de T. On aurait pu par exemple utiliser la commande ech = [0]*10000 qui crée une liste de taille 10 000 remplie de 0, puis changer les 0 en des simulations de T petit à petit avec la boucle for.

Ici, j'ai choisi de créer une liste vide puis de l'étendre d'une case dans chaque passage de la boucle for avec la commande append.

4. Il faut placer au moins 3 jetons pour remplir les 3 urnes mais on peut attendre arbitrairement longtemps. On a donc

$$T(\Omega) = [\![3, +\infty[\![.$$

5. Pour $n \geqslant 3$, on observe que

$$(T = n) \cup V_n = V_{n-1}.$$

En effet, si au moins une urne est vide après $n-1$ jetons placés, il y a deux situations (incompatibles) : soit il reste encore une urne vide après avoir placé le $n$ième jeton (c'est-à-dire V_n), soit on a rempli toutes les urnes pour la première fois avec le $n$ième jeton (c'est-à-dire $(T = n)$). L'incompatibilité nous permet de séparer l'union des probabilités en somme,

$$P(T = n) + P(V_n) = P(V_{n-1}).$$

6. C'est une question un peu difficile. Il faut commencer par expliciter la loi de T pour en déduire son espérance. D'après la question précédente, on a, pour $n \geqslant 3$,

$$\begin{aligned} P(T=n) &= P(V_{n-1}) - P(V_n) \\ &= 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 3\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n} + 3\left(\frac{1}{3}\right)^{n} \\ &= 3\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\left(1-\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{3}-1\right)\right] \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

On revient ensuite à la définition de l'espérance. La prudence impose de ne pas considérer tout de suite que T admet une espérance, et on cherche à justifier l'existence de l'espérance en même temps que l'on calcule sa valeur. On sait donc que T admet une espérance si et seulement si la série

$$\sum nP(T=n)$$

converge. Or

$$nP(T=n) = n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right) = n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 2n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}.$$

La terme général de la série que l'on étudie apparaît alors comme une combinaison linéaire de termes généraux de séries géométriques dérivées premières de raisons respectives $\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{3}$. Puisque les deux raisons sont comprises strictement entre 0 et 1, on sait que les séries géométriques dérivées premières convergent. On conclut que T admet une espérance. Puis

$$\begin{aligned} E(T) &= \sum_{n=3}^{+\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 2\sum_{k=3}^{+\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{(1-2/3)^2} - 1 - \frac{4}{3} - 2\left(\frac{1}{(1-1/3)^2} - 1 - \frac{2}{3}\right) \\ &= \frac{11}{2} \end{aligned}$$